MATHÉMATIQUES ET MUSIQUE

Écouter un « Block Design »

Tom Johnson[1]

Tom Johnson est né dans le Colorado en 1939. Il a étudié à l'université de Yale et, en privé, avec Morton Feldman. Après 15 ans à New York, il s'installe à Paris, où il habite depuis 1983. Il est généralement considéré comme un minimaliste, puisqu'il travaille avec du matériel toujours réduit, en procédant toutefois de manière nettement plus logique que la plupart des autres minimalistes, ce qui se traduit par un emploi fréquent de formules, de permutations et de séquences prévisibles. Self-Similar Melodies, *un texte théorique de 291 pages en anglais, a été édité en 1996 par les Éditions 75. Des articles, fichiers sonores et d'autres informations se trouvent à l'adresse :* `http://www.tom.johnson.org`

Tom Johnson au festival de Daegu[2]

Depuis longtemps je compose de la musique déterministe, musique qui suit ses formules, ses règles, musique qui a une direction, une logique, une rationalité. Une des meilleures manières de faire cela est de suivre un modèle mathématique.

Entre 1978 et 1988 j'étais content avec des modèles qu'un musicien comme moi peut comprendre sans difficulté : une suite logique évidente, tous les diviseurs d'un nombre abondant, le triangle de Pascal, les permutations des notes d'une mélodie, ou toutes les combinaisons de quelque chose. Même la table de multiplication a suffi pour un morceau court pour piano, mais avec le temps, je voulais aborder des objets mathématiques plus sophistiqués, parfois des choses que je n'avais jamais étudiées. J'ai trouvé dans un livre, par exemple, la suite de Narayana ($F_n = F_{n-1} + F_{n-3}$), qui est devenue *Les Vaches de Narayana*, un morceau que Michel Waldschmidt a transformé récemment dans une version vidéo, ajoutant beaucoup d'images et d'information mathématique. Jean-Paul Allouche, que j'ai rencontré, il y a longtemps grâce à Waldschmidt, a collaboré avec moi pour faire une émission à France Culture avec une musique de sept notes, suivant le triangle de Pascal modulo sept. Il m'a aidé aussi à comprendre les automates finis, une exploration qui s'est terminée avec *Automatic Music*, un morceau de 50 minutes pour six percussionnistes.

[1] avec l'aimable accord de Paul Denny (université d'Auckland) et de Patrick Solé (CNRS, Nice)

[2] Festival de nouvelle musique en Corée du sud, juin 2005

Il y a quatre ans, j'ai commencé à étudier les pavages linéaires, un travail très riche, fait en collaboration avec des mathématiciens comme Emmanuel Amiot, qui a résumé cette recherche dans la Gazette d'octobre 2005.

Quand je raconte tout cela à un mathématicien, la première réponse est toujours « j'aimerais entendre une musique comme ça », mais malheureusement il n'est pas possible de faire entendre la musique dans un article, et je ne suis pas convaincu que l'écoute est essentielle pour comprendre cette manière de travailler. La différence entre musique subjective et musique mathématiquement calculée n'est pas aussi audible que la différence entre musique baroque et musique romantique, ou la différence entre une valse et une berceuse, et c'est probablement mieux que j'essaie simplement d'expliquer cette différence par un exemple qui m'occupe depuis un an environ.

L'harmonie n'a que rarement joué un rôle principal dans ma musique. Il y avait le *Catalogue des Accords*, tous les 8178 accords possibles dans une seule octave, et *Le Triangle de Pascal*, où je me suis limité aux accords construits avec secondes majeures et tierces mineures, mais maintenant je veux composer ce que j'appelle des « harmonies rationnelles », et cela m'oblige d'entrer sérieusement dans la combinatoire. Les accords ne sont que des combinaisons de notes tirées des gammes finies. Qu'est-ce qui se passe si on les considère simplement comme éléments tirés des groupes finis ?

Surtout, à la suggestion de Jean-Paul Allouche, je suis allé à la bibliothèque un jour pour voir ce que je pouvais trouver sur « block design ». Je n'ai pas la formation nécessaire pour comprendre la plupart des articles écrits sur ce sujet, mais un problème classique de 1847 était abordable, et fortement stimulant. C'est les « promenades de Kirkman », parfois considérées comme le début de l'étude sérieuse de block design :

« *15 young ladies in a school walk out three abreast for seven days in succession : it is required to arrange them daily, so that no two shall walk twice abreast. (Ladies and Gentlemen's Diary, Query VI, p. 48, 1847* ».

L'article expliquant cela donna deux ou trois exemples, et j'ai essayé d'arranger les 15 dames moi-même aussi. J'ai réussi à trouver deux ou trois solutions pour une semaine, et de pianoter les résultats avec plusieurs gammes de 15 notes. Comme j'ai dit, il n'y a aucune différence éclatante entre la musique mathématique et la musique qui vient des règles de consonance et dissonance, ou de l'intuition, ou de quelque source profondément spirituelle et mystérieuse. Un accord est un accord, et il n'a que le son d'un accord, peu importe son origine. Il y a des différences quand même. Si un accord est considéré uniquement comme une simple combinaison d'éléments d'un groupe, la probabilité est identique pour chaque candidat qu'il soit un accord majeur ou un accord très dissonant. Il y a une merveilleuse démocratie, les notes deviennent abstractions au delà de la tradition musicale, et la séparation entre musique tonale et musique atonale disparaît complètement. Une autre différence est qu'il n'y a pas d'ordre dans les combinaisons. Il n'y a aucune raison pour qu'une combinaison soit la résolution d'une autre combinaison, et aucune raison pour que l'accord final soit particulier.

L'idée de mettre en musique les promenades de Kirkman me semblait très bonne, mais j'avais besoin de plus d'informations pour vraiment comprendre ce que j'étais en train de faire. J'ai décidé d'écrire un courriel à Paul Denny, un mathématicien à l'Université d'Auckland en Nouvelle-Zélande.

« I am a composer, but I'm finding that I can make lovely harmonies with Steiner Triple Systems, and related combinations, so I spent a long day in the National Library here in Paris, mostly with Colbourn and Rosa, where I found a most interesting reference to your work with the 48 TS(6,14) subgroups and the 75 TS(6,16) subgroups, and I'd love to look at them – or rather, listen to them. I'm not a mathematician, so if your work consists of formulas and other symbolic notation that only mathematicians will understand, I probably won't get it right. But if the combinations are somehow written out, they will probably be something I can use. I would of course give credit to you, and it might even be something you'd enjoy listening to one day. If you can send this information to me, or let me know where else I might order it or download it, I would appreciate this very much. »

Denny était content de recevoir une question d'un compositeur, et il a répondu immédiatement. Comprenant que je ne savais pas grand chose sur le sujet, sa réponse avait beaucoup d'informations élémentaires, que je cite ici pour les lecteurs qui n'ont pas étudié les block design, et pour établir un vocabulaire utilisé souvent quand on parle de block design, ou plus généralement de « combinatorial designs ».

« I don't have collections of designs stored on disk, but I can easily generate some small classes of designs for you. Balanced incomplete block designs can be defined by 5 parameters :

** v = a number of « points », or « numbers »*

** k = the size of each block*

** L = the number of times each pair of points must appear in the total design*

** B = the total number of blocks in each design*

** r = the number of times each point appears in the total design*

So, for example, the $v = 9$, $k = 3$ and $L = 1$ design looks like this :

$$\begin{array}{cccc} >\{1,2,3\} & >\{4,5,6\} & >\{7,8,9\} & >\{1,4,7\} \\ >\{2,5,8\} & >\{3,6,9\} & >\{1,5,9\} & >\{2,6,7\} \\ >\{3,4,8\} & >\{1,6,8\} & >\{2,4,9\} & >\{3,5,7\} \end{array}$$

Here, $v = 9$, $k = 3$, and $L = 1$. There are 9 points, each block is of size 3, and the number of times each pair of points appears in the design is 1. For example, the pair (1,2) appears in exactly one block (the first block) and no other blocks. The same can be said for any pair of points.

Also, we have $B = 12$, because there are 12 blocks in the design, and $r = 4$ because each point is contained in 4 blocks. This design is unique, which is to say that all other designs satisfying these constraints are isomorphic to this one.

If we change the parameter set slightly, to say :

$v = 9$

$k = 3$

$L = 2$

$B = 24$

$r = 8$

then there are in fact 36 unique solutions or designs. Again, a mathematician would say that exactly 36 non-ismorphic designs exist for that set of parameters.

For example, here is one such design :

{1 2 3}	{1 2 3}	{1 4 5}	{1 4 6}
{1 5 7}	{1 6 8}	{1 7 9}	{1 8 9}
{2 4 5}	{2 4 8}	{2 5 9}	{2 6 7}
{2 6 9}	{2 7 8}	{3 4 7}	{3 4 9}
{3 5 6}	{3 5 8}	{3 6 7}	{3 8 9}
{4 6 8}	{4 7 9}	{5 6 9}	{5 7 8}

*Notice that every pair of points (such as 1,2) occurs in exactly *two* of these blocks.*

If these sorts of designs are useful, I can easily generate them for you (I could generate all 36 if you like – they all have a unique structure and some have more symmetry than others).

However, if there are other sets of parameters you are more interested in, then let me know. If you could tell me the values for v, k and L that you are interested in, that is most useful.

I hope some of that has been helpful, although you may already have known much of it ! Let me know if I can help... all the best ! »

Ma réponse a suivi le même jour :

« *Good to get your last letter. It gave me much to think about, and many things to prepare in response.*

I knew about the S(9,3,1) system, as I saw somewhere how you could derive it from a 3 x 3 square, and I knew that this is a Steiner Triple System, where blocks of three elements must contain each pair of elements exactly once, but there is one Steiner Triple System that particularly interests me. If you want to run some numbers through your computer and look for complete systems, where all the combinations appear once and only once, it would be nice to start with S(15,3,1), the « Kirkman promenades ». It seems that Kirkman only knew one solution, but he eventually found several others, and after a while people started looking for all 13, to make a large Steiner system. 13 times the 7 solutions of the 5 daily lines of ladies makes all 455 combinations of 15 taken three at a time. Since this is a classic problem, it will make a lovely piece, and I have found a nice scale for playing the 7 x 5 three-note chords, which gives a very strange and interesting combination of consonants and dissonances. Maybe for three flutes. But one week of this music goes by in only a minute or so, so I really need to find the other 12 weeks to make a piece out of it.

I'm enjoying our correspondence and hope it continues for some time. »

Quelques jours plus tard, Denny m'envoie cette information :

« *The Steiner Triple Systems are a *special* type of balanced incomplete block design for which* $k = 3$ *and* $L = 1$*, where L is the number of times each pair must appear. They only exist for values of v such that* $v = 1$ *or* 3 *(mod* 6*). The number of non-isomorphic solutions for the Steiner Triple Systems are given in the table below :*

v	*number of non-isomorphic solutions*
7	1
9	1
13	2
15	80
19	11,084,874,829
21	? ? ? ?

These results are well-known – there is a unique solution for $v = 7$ *and* 9, 2 *solutions for* $v = 13$ *and* 80 *solutions when* $v = 15$ *(which corresponds to the famous Kirkman story you mentioned !).*

There are hundreds of millions of solutions when $v = 19$*, and it is unlikely whether anyone will know the exact number of solutions when* $v = 21$ *as it is likely to be enormous.*

- A « large set » of $STS(v)$ *is a family of solutions* $B1, B2, ..., Bq$ *of q Steiner Triple Systems of order* v*, all on the same point set, such that every triple is contained in at least one of the sets* Bi*.*

- A large set is said to be « mutually disjoint » in the case that every possible triple occurs in precisely one of the solutions

The software that I developed (as part of a Masters thesis under the supervision of Peter Gibbons) is able to construct all non-isomorphic designs for a particular parameter set. For example, it can be used to generate all 80 solutions for the v=15 Steiner Triple Systems pretty quickly. However, I haven't spent any time looking at large sets of mutually disjoint designs.

It seems as though from the point of view of making music it is preferable to have a collection of solutions that form a large set with the nice mutually disjoint property rather than the non-isomorphic solutions on their own. »

Deux semaines après, la correspondance recommence avec la lettre suivante. Je ne suis pas sûr que la solution « originale » proposée dans cette lettre soit correcte, mais je laisse le texte comme il était.

« Gone for a week of concerts and teaching in Vienna, but now I'm back at work on the new piece that is to be titled : « Kirkman's Ladies : Rational Harmonies in Three Voices. »

I tried without success lots of geometric ways of finding the five basic curves that will permute around the permutation orbits (1,2,3,4,5,6,7) (8,9,10,11,12,13,14) (15), and then found a technique that actually produced an original solution :

1		*3*				*7*								
	2						*8*					*13*		
			4	*5*							*12*			
					6								*14*	*15*
								9	*10*	*11*				

Somehow I was able to see in this format (something I've used a lot in rhythmic tiling problems) that the same pair would never come up twice. And the musical result was as lovely as with the solution I'd taken from some book. Elated, I began constructing more solutions by hand, but inevitably there was a flaw somewhere. So it is clear that if I want a large Steiner system, a complete 13-week solution to the Kirkman's Ladies problem, I have to find a method I can understand, or find a list that someone else has prepared. If I can somehow come up with a large set containing all 455 combinations once each, and producing 13 weeks of music, that will be particularly elegant. I'm sure too that there are other block designs that really need to be translated into music further down the road. »

Cette fois, en réponse, je reçois toute l'information précise que je cherchais :

« I found a paper that I think will be very useful to you. It was written by R.H.F.Denniston in 1973, and contains a solution to the Kirkman's schoolgirl problem (although the paper refers to this as Sylvester's schoolgirl problem, because Sylvester proposed the question as to whether the walks could continue for 13 weeks until each triplet had walked together).

If you look at Tables 1 and 2 in the paper, you will find a very special Steiner Triple System of order 15. From this, you can generate another Steiner Triple Systems by applying the simple transformation rules to each block :

$$\{x, y, z\} \to \{x+1,\ y+1,\ z+1\}\ mod\ 13$$
$$\{x, y, A\} \to \{x+1,\ y+1,\ A\}\ mod\ 13$$
$$\{x, y, B\} \to \{x+1,\ y+1,\ B\}\ mod\ 13$$
$$\{x, A, B\} \to \{x+1,\ A, B\}\ mod\ 13$$

If you apply these same rules to the new Steiner Triple System, you will get another Steiner Triple System. If you repeat this 12 times you will have a set of 13 Steiner Triple Systems, and this will in fact be a large set – where all 455 triples are used and each design can be resolved correctly into 7 by 5 lines.

I would very much like to hear the generated music :–) Are there any other types of designs you would like to look at ? »

Attaché à ce courriel était l'article de R.H.F. Denniston (*Discrete Mathematics* **9** *(1974), p. 229-233*), apparemment la première solution éditée d'un « large Steiner system », et maintenant je pouvais grouper toutes les 13 * 7 * 5 * 3 dames.

Face à 455 combinaisons de 1 à 15, pris trois à la fois, un compositeur a beaucoup de liberté, parce qu'il n'y a pas d'ordre dans les combinaisons. On peut placer les trois femmes en ordre arbitraire sur chaque rang, choisir n'importe quel ordre pour les cinq combinaisons de trois femmes chaque jour, et exercer la même liberté pour les sept jours chaque semaine et pour les 13 semaines du semestre. Comme d'habitude, je voulais donner une logique à l'écoulement de la musique, donc j'ai décidé que les cinq accords de chaque jour devraient s'enchaîner avec la voix basse descendante. Pour ordonner les promenades de lundi, mardi, mercredi ..., je considérais le dernier accord de chaque jour avec la même logique descendante, et les 13 semaines suivaient également un ordre descendant.

Malgré cette organisation, on ne sent pas une progression mécanique. Les accords normalement classés tonals se mêlent avec les accords qu'on entend normalement dans un contexte atonal, et les règles traditionnelles pour l'enchaînement d'accords ne se jouent pas du tout. On peut presque croire que ces harmonies étaient choisies par hasard, mais avec une écoute plus concentrée on peut aussi remarquer qu'avec chaque groupe de cinq accords, on entend les mêmes quinze notes une fois chacune, et qu'on n'entend jamais le même accord deux fois. Un auditeur très habile peut même sentir qu'à l'intérieure de chaque semaine une seule paire de notes n'arrive jamais simultanément deux fois.

Tout cela me fascinait beaucoup quand je commençais à mettre la longue liste sur papier à musique. Bien sûr, c'est un peu fastidieux d'écrire tous ces accords à la main, mais il n'y en avait que 455, et le travail allait assez vite. Plus tard Javier Ruiz, qui a préparé mes partitions depuis longtemps, et qui est extrêmement habile avec l'ordinateur, me dit : « Mais on ne peut pas travailler comme cela. Il peut y avoir une erreur ». Il recalcule les données de Denniston, traduit les chiffres en MIDI, envoie les notes MIDI au logiciel Finale, et sort une partition impeccable.

Ce morceau n'a pas encore été joué dans un concert officiel, et je n'ai pas eu des réactions très claires, mais après quelques auditions privées, je comprends déjà que les gens qui aiment cette musique ne sont pas toujours les gens qui la comprennent le mieux. Je n'ai aucune idée pourquoi une personne aime ou n'aime pas Kirkman's Ladies, mais je peux expliquer un peu le problème de compréhension, qui est vraiment un problème de perception.

Considérez les collections de chiffres suivantes. Sans compter systématiquement, pouvez-vous confirmer que tous les nombres 0 à 14 sont présents en chaque collection ?

11	10	13	12	14
6	7	9	8	3
5	4	2	1	0

8	9	13	6	11
2	1	3	4	12
14	10	0	5	7

13	7	11	8	3
5	4	2	1	12
10	5	1	6	0

En tant que bon lecteur de la *Gazette*, vous avez sans doute vu que les deux premières collections sont complètes et que la troisième contient des erreurs, mais si vous ne pouvez qu'écouter les mêmes collections, jouées sur une gamme de 15 hauteurs, pourriez-vous constater cela avec la même aise, la même satisfaction ? Probablement pas. J'ai remarqué pourtant que mes amis musiciens sont parfois assez habiles avec de tels exercices. Quand je joue une telle suite de cinq accords incorrectement, ils entendent souvent qu'une note a été jouée deux fois et qu'une autre note manque quelque part. Et si je me trompe en jouant un accord de quatre notes, ou de seulement deux notes, ils entendent l'erreur davantage. Je ne m'inquiète pas trop pour les capacités perceptuelles de mes auditeurs. Ni la facilité de percevoir les détails d'un morceau de musique ni le profil exact des auditeurs qui vont apprécier la musique ne sont le souci principal du compositeur. Très souvent d'ailleurs on n'a aucune idée pourquoi un auditeur peut aimer ou ne pas aimer un morceau, et l'auditeur n'est pas toujours sûr non plus. Tout cela est très difficile à évaluer, et cette information n'est pas essentielle pour le compositeur en tout cas. Pour moi il suffit de savoir qu'un morceau a été soigneusement composé, qu'il a un sens, et que ce sens est au moins perceptible par la personne qui l'écrit.

Kirkman's Ladies se termine donc bien, mais je ne voulais pas arrêter là. Je faisais encore des visites aux bibliothèques mathématiques parisiennes pour essayer de trouver d'autres block designs susceptibles d'une traduction musicale. Il y a beaucoup d'articles sur le sujet maintenant, venant souvent des Etats-Unis et de la Chine, mais aussi de l'Inde, de l'Angleterre, de l'Allemagne, de partout. Surtout utile pour moi était le livre *Triple Systems* de Charles J. Colbourn et Alexander Rosa et le CRC *Handbook of Combinatorial Designs*, édité par Charles J. Colbourn et Jeffrey Dinitz. Pendant quelque temps, j'avais plus besoin d'étudier les mathématiques que d'écrire la musique, et je trouvais beaucoup de possibilités. « Room squares » m'intéressait beaucoup, par exemple, et j'avais une correspondance stimulante avec Jeffrey Dinitz, un mathématicien de l'Université de Vermont qui a travaillé ce sujet. Peut-être je trouverai une musique qui suit ce joli modèle mathématique, mais pour l'instant les Room squares restent silencieux.

En même temps que je cherchais de nouveaux matériaux mathématiques, je voulais faire circuler *Kirkman's Ladies* un peu. Sûrement la première partition jamais écrite à partir d'un block design peut intéresser des gens que je ne connais pas encore. J'ai envoyé un exemplaire à Patrick Solé, par exemple, un combinatoricien français. Jean-Paul Allouche m'avait recommandé ce nom longtemps avant, et j'avais essayé de lire un article de lui, mais ne comprenant rien, je ne l'avais jamais contacté. Mais en recevant ma partition, Patrick Solé répond avec intérêt, ajoutant ce post-scriptum :

« *PS : Il serait merveilleux de différencier par la musique des designs de mêmes paramètres mais non équivalents....* »

Cela était un peu cryptique pour moi, mais j'ai répondu aussi bien que possible avec ce que je savais :

> « *... Je trouve qu'il n'y a pas beaucoup de différences entre un STS(9) et un autre, ni musicalement ni mathématiquement. Par contre, un « group divisible design » avec groupes de tailles différentes, ou ce que Colbourn et Rosa appellent « an embedded design », peut donner une musique très différente. Mais pour quelqu'un comme moi, ces structures sont très difficiles à calculer.*

Patrick Solé a compris la direction où je voulais aller, et quelque temps plus tard il m'envoie les 253 vecteurs d'un groupe de Mathieu, connu plus exactement comme un 4-(23,7,λ). Il suggère aussi un 5-(24,8,1), mais je ne trouve pas de musique dans ces collections plus ou moins gigantesques. »

Le travail continue très lentement, et quatre mois passent avant que je n'écrive à nouveau à Patrick Solé :

> « *Je sais que c'est le mois d'août, et que vous ne voulez pas trop penser les maths maintenant, mais j'ai une question qui peut vous intéresser quand vous recommencez le travail.*
>
> *Je n'ai pas encore trouvé une manière pour mettre en musique M(23), mais je travaille « Block Design for piano », une suite de 330 arpeggios de six notes qui viennent directement de la page 47 du CRC Handbook, un design défini comme 4-(12,6,10). Chaque quadruplet, par définition, arrive 10 fois dans les 330 blocs, mais est ce qu'il n'est pas également vrai que*
>
> *Chaque élément arrive 165 fois*
>
> *Chaque paire arrive 75 fois*
>
> *Et que chaque triplet arrive 30 fois ?*

Donc, est-ce qu'on ne peut pas aussi bien appeler ce block design 3-(12,6,30) ou 2-(12,3,75) ? »

Trois jours après j'ai sa réponse :

> « *Bien sûr tout t-design est aussi un i-design pour $i < t$: qui peut le plus peut le moins !*
>
> *D'après MCWilliams et Sloane, la formule est*
>
> $\lambda_i = \lambda(v - i \text{ choose } t - i)/(k - i \text{ choose } t - i)$

La preuve est facile si on maîtrise le principe de compter des paires de deux façons différentes : par la droite et par la gauche »

Je ne comprends pas encore la formule de McWilliams et Sloane, et il n'est même pas très clair pourquoi il faut parfois compter par la droite et parfois par la gauche, mais je suis très fier d'avoir reçu A+ d'un mathématicien, et d'être rassuré que les 330 arpeggios dans ma nouvelle composition représentent une application correcte du design 4-(12,6,10).

Cette partition, *Block Design for Piano*, produit une musique avec des différences assez subtiles, juste 330 arpeggios de six notes, un après l'autre. La musique dure 20 minutes, et c'est probable que les auditeurs qui l'écoutent comme musique de fond n'apprécieront pas trop les petites différences entre les groupes de six notes montantes. Beaucoup ne vont même pas se rendre compte que j'avais finalement frappé la grande cible d'Arnold Schœnberg en réalisant une égalité absolue des 12 sons.

En fait, je ne saurai jamais qui comprendra quoi à quel niveau de précision, et je n'ai aucune idée qui appréciera Block Design for Piano ni pourquoi, mais c'est probablement mieux que le compositeur ne pense pas trop à tout cela. J'ai appris déjà très jeune que mes compositions ont leurs propres vies. Une fois terminées, elles n'ont plus besoin de moi. Elles trouvent toutes seules leurs significations, leur importance, leur manque d'importance, leur grand public, leur petit public – ou leur disparition.